Anhang A: Herleitung des Bayes-Theorems aus den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie

811 In den folgenden Grafiken bezeichnet S den Ereignisraum, die Menge aller möglichen Ereignisse. Ein Ereignis ist eine Teilmenge von S.

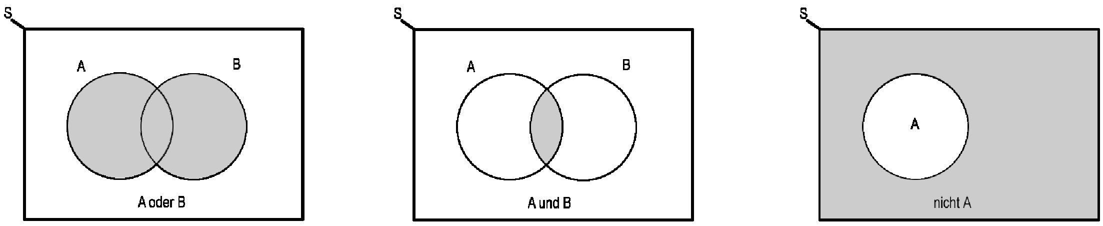
812 Zwei Ereignisse A und B können in folgenden Kombinationen auftreten

- $A \cup B$ (A oder B), d.h. es treten entweder A oder B oder beide zusammen auf (*Gesamtmenge* der beiden Ereignisse);
- $A \cap B$ (A und B); d.h. es tritt sowohl A als auch B auf (*Schnittmenge* der beiden Ereignisse). Wenn A und B sich gegenseitig ausschliessen, ist die Schnittmenge leer.

813 Weiter bedeutet

- $\neg A$ *Ausschluss* des Ereignisses A und bezeichnet alle Ereignisse, die nicht A sind.

814 Grafisch lassen sich $A \cup B$, $A \cap B$ und $\neg A$ wie folgt darstellen:[1263]



815 Die klassischen Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie sind

a) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses hat einen Wert zwischen 0 und 1, wobei 0 bedeutet, dass das Ereignis nie eintritt und 1, dass es sicher eintritt.

b) Die Randwahrscheinlichkeit aller Ereignisse im Ereignisraum S ist 1.

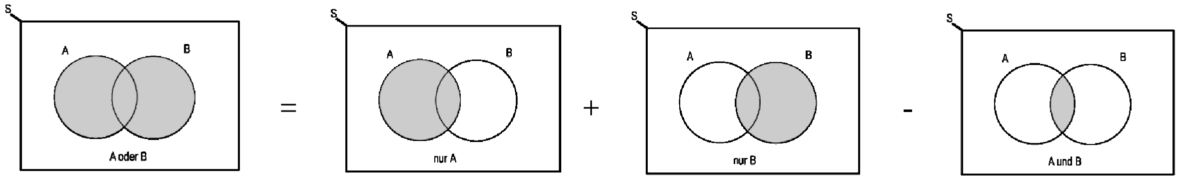
c) Wenn zwei Ereignisse A und B sich gegenseitig ausschliessen gilt $A \cup B = P(A) + P(B)$ und $P(A \cap B) = 0$. Dies gilt für alle n sich gegenseitig ausschliessender Ereignisse. Beispiel: Wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 zur Nachmittagsvorlesung gehe und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 ins Seebad, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ich entweder zur Nachmittagsvorlesung oder ins Seebad gehe, 0,8. Die Wahrscheinlichkeit, dass ich sowohl ins Seebad als auch in die Nachmittagsvorlesung gehe, ist 0.

[1263] Die Darstellung und die Herleitung folgt CHAMPOD/TARONI, FN 710, 214 ff. Für den formalen Beweis siehe JEFFREY, FN 613, 16.

816 Wenn sich die beiden Ereignisse A und B nicht gegenseitig ausschliessen, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A oder B oder beide zusammen auftreten, nach der folgenden Regel:

$$A \cup B = P(A) + P(B) - A \cap B$$

817 Grafisch dargestellt:



818 Durch die Addition von A und B wird der Bereich, wo sich A und B überschneiden, zwei Mal gezählt. Er muss daher wieder einmal subtrahiert werden.

819 Mit ganz ähnlichen Überlegungen lässt sich herleiten, wie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B \mid A)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass B auftritt, wenn wir wissen, dass A vorliegt, aus den Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$ und $P(A)$ berechnet werden kann:

820 Wenn A und B sich gegenseitig ausschliessen, liegt die Antwort auf der Hand: B wird nicht eintreten. Wenn A und B sich nicht gegenseitig ausschliessen, ist es möglich, dass B eintritt. Da wir wissen, dass A eingetreten ist, reduziert sich der Ereignisraum S auf die Teilmenge A. Was uns interessiert sind die Ereignisse B, die innerhalb der Teilmenge A liegen, oder mit anderen Worten die Schnittmenge $A \cap B$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B \mid A)$ ergibt sich aus der Division von $P(A \cap B)$ durch $P(A)$, d.h. aus dem Verhältnis der Fläche „A und B“ zur Fläche „nur A“ gemäss den obigen Grafiken. Es gilt also

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{oder} \qquad P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

821 Das Bayes-Theorem ergibt sich aus der Überlegung, dass $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, oder

$$P(B \mid A) \cdot P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

822 Nach $P(B \mid A)$ gelöst

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

823 P(A) lässt sich zerlegen in

$$P(A) = \underbrace{P(B \cap A)}_{P(A \mid B) \cdot P(B)} + \underbrace{P(\neg B \cap A)}_{P(A \mid \neg B) \cdot P(\neg B)} = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \neg B) \cdot P(\neg B)$$

824 Daher lautet das Bayes-Theorem in seiner extensiven Form, für zwei sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse A und B

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\neg B) \cdot P(A \mid \neg B)}$$